Concursul de Matematică „Gheorghe S. Nadiu”

Ediţia a III - a, 7. 12. 2019

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

Problema 1. Să se demonstreze că

$$\Pi_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) < 3,\ \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

Soluţie. Se demonstrează prin inducţie

$$\Pi_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) < 3-\frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbf{N}^*.\ \mathbf{3p}$$

Pentru $n=1$ avem egalitate. **1p**

Demonstrăm $P(k) \longrightarrow P(k+1)$:

$$\left(1+\frac{1}{(k+1)^3}\right)\Pi_{i=1}^{k}\left(1+\frac{1}{i^3}\right) < 3-\frac{1}{k+1}$$

$$\left(1+\frac{1}{(k+1)^3}\right)\left(3-\frac{1}{k}\right) < 3-\frac{1}{k+1}\ \mathbf{2p}$$

$$0 \leq k^2-k+2 \qquad \mathbf{1p}$$

Problema 2. Să se arate că $\sqrt{n^2+3^n} \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ cu excepţia a trei valori ale lui $n \in \mathbf{N}$.

Soluţie

Se determină $n \in \mathbf{N}$ pentru care $\sqrt{n^2+3^n}$ este pătrat perfect. $n=0$ este soluţie.

$n^2+3^n=m^2 \Rightarrow (m+n)(m-n)=3^n \Rightarrow m-n=3^k, m+n=3^{n-k}$

$m-n<m+n \Rightarrow 3^k<3^{n-k} \Rightarrow n-2k>0 \Rightarrow n-2k \geq 1.$

Dacă $n-2k=1$ rezultă $2n=3^{n-k}-3^k=3^k(3^{n-2k}-1)=3^k\cdot 2$ şi $n=3^k=2k+1$

$\Rightarrow k=0$ sau $k=1$ deci $n=1$ sau $n=3$. **4p**

Dacă $n-2k>1$ rezultă $n-2k \geq 2 \Leftrightarrow k \leq n-k-2$

$3^k \leq 3^{n-k-2} \Rightarrow 2n=3^{n-k}-3^k \geq 3^{n-k}-3^{n-k-2}=3^{n-k-2}\cdot 8 \geq 8[1+2(n-k-2)]$

$\Rightarrow 8k+12 \geq 7n.$

Avem $n \geq 2k+2$ şi rezultă $7n \geq 14k+14$ imposibil.

Concluzia $\sqrt{n^2+3^n} \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\ \forall n \in \mathbf{N}\setminus\{0,1,3\}$. **3p**

Problema 3. Fie $x, y, z \in \mathbf{R}_+^*$ cu $x^2+y^2+z^2=3$. Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{x^2}{1+[x]^2+\{x\}^2}+\frac{y^2}{1+[y]^2+\{y\}^2}+\frac{z^2}{1+[z]^2+\{z\}^2}<\frac{9}{4}.$$

Soluţie

CBS $(1+[x]^2+\{x\}^2)(x^2+1+1) \geq 4x^2$ **3p**

$\Rightarrow 1+[x]^2+\{x\}^2 \geq \frac{4x^2}{2+x^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1+[x]^2+\{x\}^2} \leq \frac{x^2+2}{4}$ şi analoagele. **2p**

Rezultă

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{1+[x]^2+\{x\}^2}+\frac{y^2}{1+[y]^2+\{y\}^2}+\frac{z^2}{1+[z]^2+\{z\}^2} &\leq \frac{x^2+2}{4}+\frac{y^2+2}{4}+\frac{z^2+2}{4}\\ &= \frac{x^2+y^2+z^2+6}{4}=3.\ \mathbf{1p}\end{aligned}$$

Inegalitatea este strictă. **1p**

Problema 4. În plan se dau vectorii $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ a căror sumă este $\overrightarrow{0}$. Să se arate că

$$|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|+|\overrightarrow{d}| \geq |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}|+|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}|+|\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}|.$$

Soluţie. Cei patru vectori pot fi aşezaţi astfel încât să formeze două triunghiuri:

$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{d}=\overrightarrow{DA}$, $[BC]\cap[AD]=\{E\}$. **3p**

$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{d}$

$DB \leq DE+EB,\ CA \leq EA+CE \Rightarrow |\overrightarrow{d}+\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}| \leq |\overrightarrow{d}|+|\overrightarrow{b}|$

$|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}|=|-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}| \leq |\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{c}|$ **3p**

$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{d}|+|\overrightarrow{b}+\overrightarrow{d}|+|\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}| \leq |\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{c}|+|\overrightarrow{d}|$ **1p**

$\square$